



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a XI-a

Problema 1. Determinați funcțiile de două ori derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $(f'(x))^2 + f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătați că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ dacă și numai dacă există matricele inversabile $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AX + YB = AZB$.

Problema 3. Fie un număr natural $n \geq 2$ și matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea $A^2B = A$.

- Demonstrați că $(AB - BA)^2 = O_n$.
- Arătați că pentru oricare număr natural $k \leq n/2$ există matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea din enunț astfel încât $\text{rang}(AB - BA) = k$.

Problema 4. Considerăm o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care există o funcție derivabilă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive, convergent la 0, astfel încât

$$g'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + a_n) - f(x)}{a_n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- Dați un exemplu de o astfel de funcție f care nu este derivabilă în niciun punct $x \in \mathbb{R}$.
- Arătați că dacă f este continuă pe \mathbb{R} atunci f este derivabilă pe \mathbb{R} .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.