



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023**

CLASA a X-a

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2(5^x + 6^x - 3^x) = 7^x + 9^x.$$

Problema 2. Determinați cel mai mare număr natural k având proprietatea că există numărul natural n astfel încât:

$$\sin(n+1) < \sin(n+2) < \sin(n+3) < \dots < \sin(n+k).$$

Notă: Aproximarea prin lipsă a lui π la a patra zecimală este 3,1415.

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC oarecare și punctele mobile M pe semidreapta BC , N pe semidreapta CA și P pe semidreapta AB care pornesc simultan din B , C și, respectiv, A și se deplasează cu vitezele constante $v_1, v_2, v_3 > 0$, exprimate prin aceeași unitate de măsură.

- (a) Știind că există trei momente distincte în care triunghiul MNP este echilateral, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral și, în plus, $v_1 = v_2 = v_3$.
- (b) Demonstrați că dacă $v_1 = v_2 = v_3$ și există un moment în care triunghiul MNP este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Problema 4. Într-un muzeu de artă sunt expuse n tablouri, $n \geq 33$, pentru care sunt folosite în total 15 culori astfel încât oricare două tablouri au cel puțin o culoare comună și nu există două tablouri care să aibă exact aceleași culori. Determinați toate valorile posibile ale lui $n \geq 33$ astfel încât oricum am colora tablourile cu proprietățile de mai sus să putem alege patru tablouri distincte pe care să le numerotăm T_1, T_2, T_3 și T_4 , astfel încât orice culoare care este folosită atât în T_1 , cât și în T_2 , se regăsește în T_3 sau în T_4 .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.